POLITECNICO DI BARI
INGEGNERIA INFORMATICA L.M.
METODI DI CONTROLLO PER I SISTEMI DI ELABORAZIONE E COMUNICAZIONE

Smith Predictor

A cura di:
Angelo Antonio Salatino
aas88ie@gmail.com

Ultima revisione:
12 Marzo 2012

Abstract -- Questo documento ha come scopo la semplice digitalizzazione degli appunti sul predittore di Smith, presi durante la lezione di Metodi di Controllo dei Sistemi di Comunicazione ed Elaborazione tenutasi il 15/12/2011 dal prof. Mascolo e tende a chiarire qualche concetto fondamentale per la comprensione dell'argomento. Questo documento, tuttavia, deve essere considerato come ausilio allo studio e non come sostitutivo a qualsiasi altro supporto. Verrà trattata una breve introduzione teorica, passando per la funzione di trasferimento e la dimostrazione della stessa fino a mostrare un esempio.

Introduzione

Il predittore di Smith è un controllore per i sistemi dinamici con ritardo puro (delay time dominant), ossia nei sistemi in cui il ritardo prevale di gran lunga sulla costante di tempo (T>>τ) [1].
Il ritardo è una quantità temporale descritta dai sistemisti come il tempo che trascorre tra il momento in cui si ha l'effetto e il momento in cui tale effetto viene preso in considerazione per modificare il sistema. Esso è presente in quasi tutti i sistemi reali. Nella maggior parte delle analisi, un errore frequente è la mancata considerazione di questa quantità, tuttavia nei casi in cui questo si presenta con un valore irrilevante rispetto alla costante di tempo è possibile trascurarlo, approssimando il tutto a un sistema senza ritardi. Un ritardo molto elevato, di contro, da vita a fenomeni oscillatori creando problemi di stabilità.

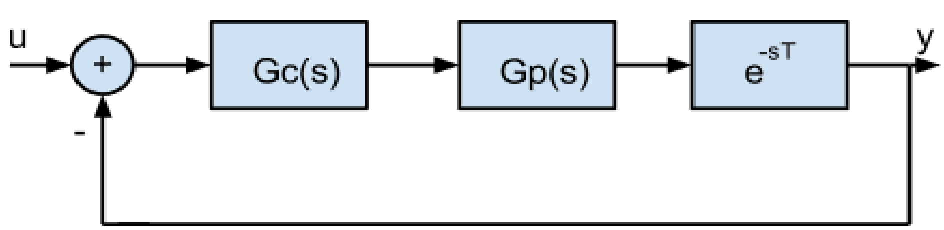
Funzione di trasferimento

Il predittore di Smith, come accennato in precedenza si comporta come un controllore, è la sua f.d.t. è composta dalla f.d.t. del plant Gp(s), dalla componente ritardo (e^{-sT}) e dalla f.d.t. di un controllore progettato per il sistema in retroazione privo di ritardo Gcr(s). Quest'ultimo controllore può essere progettato secondo le classiche regole (u = -Kx) oppure un PID, ecc.
La funzione di trasferimento è la seguente:

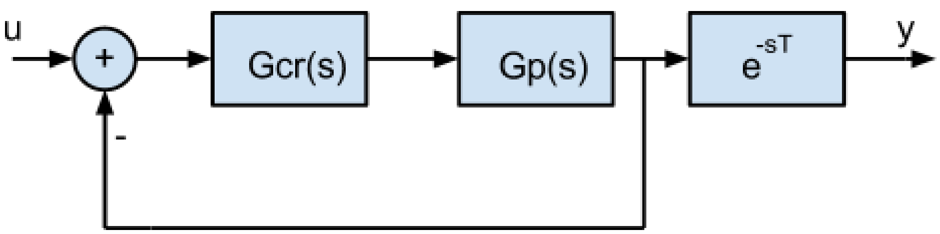
$$Gc(s) = \frac{Gcr(s)}{1 + Gcr(s) \cdot Gp(s)[1 - e^{-sT}]}$$

Dimostrazione

La progettazione di un controllore Gc(s) per un sistema il cui plant è Gp(s) ed è presente un ritardo puro di T secondi nell'anello di retroazione, come mostra la seguente figura:



è praticamente impossibile in quanto non esistono tecniche dirette per una tale progettazione. Di contro, una tecnica meno diretta è quella del predittore di Smith che va a considerare un secondo sistema (come mostrato nella seguente figura) dove il ritardo è posto fuori dall'anello di controllo permettendo cosi la progettazione di un secondo controllore Gcr(s). Quest'ultimo lo si può progettare come regolatore PID, attraverso una retroazione di tipo -Kx, ecc.



Tuttavia i due sistemi non sono completamente equivalenti perciò la progettazione di Gcr(s) non equivale alla progettazione di Gc(s). Questo problema si risolve eguagliando le due funzioni di trasferimento, ovvero ricavare il valore di Gc(s) a partire da Gcr(s).

$$f.d.t.1 = \frac{Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}}{1 + Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}}$$

$$f.d.t.2 = \frac{Gcr(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}}{1 + Gcr(s) \cdot Gp(s)}$$

$$f.d.t.1 = f.d.t.2$$

$$\frac{Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}}{1 + Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}} = \frac{Gcr(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}}{1 + Gcr(s) \cdot Gp(s)}$$

$$\frac{Gc(s)}{1 + Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT}} = \frac{Gcr(s)}{1 + Gcr(s) \cdot Gp(s)}$$

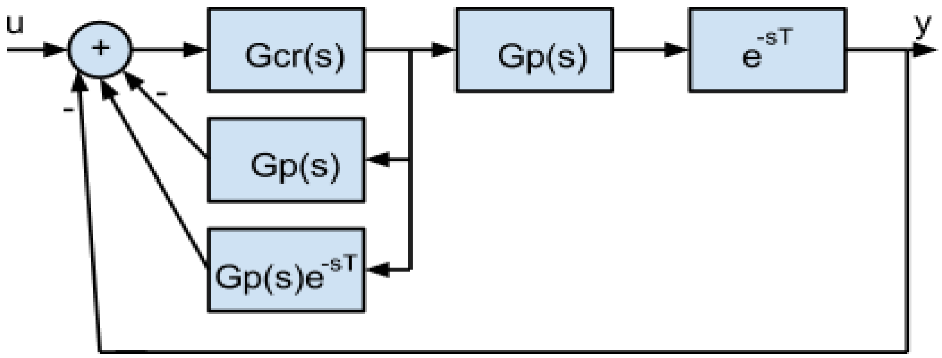
$$Gc(s) = \frac{Gcr(s) \cdot (1 + Gc(s) \cdot Gp(s) \cdot e^{-sT})}{1 + Gcr(s) \cdot Gp(s)}$$

$$Gc(s)\left(1-\frac{Gcr(s)\cdot Gp(s)\cdot e^{-sT}}{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)}\right) = \frac{Gcr(s)}{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)}$$

$$Gc(s)\left(\frac{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)-Gcr(s)\cdot Gp(s)\cdot e^{-sT}}{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)}\right) = \frac{Gcr(s)}{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)}$$

$$Gc(s)(1+Gcr(s)\cdot Gp(s)[1-e^{-sT}]) = Gcr(s)$$

$$Gc(s) = \frac{Gcr(s)}{1+Gcr(s)\cdot Gp(s)[1-e^{-sT}]}$$



Esempio

Considerato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento: $G(s) = e^{-2s}/s(s+2)$. Utilizzando il principio di Smith:

1. Si progetti una retroazione di stato in modo da avere un tempo di assestamento al 2% pari a 3s e una sovraelongazione percentuale pari al 3 %.
2. Si progetti uno stimatore avente una coppia di poli complessi coniugati con fattore di smorzamento δ = 0.7 e una costante di tempo pari a 1/5 di quella del sistema in retroazione determinato al punto 1).
3. Si trovi la f.d.t. del controllore determinato ai punti 1) e 2) con Smith Predictor;

--- *Soluzione*

$G(s) = Gp(s)e^{-2s}$ il che implica $Gp(s)=1/s(s+2)$.

Per risolvere questo problema si procede inizialmente con la trasformazione del sistema Gp(s) (privo del ritardo) in forma canonica di controllabilità. Si progetta una retroazione di stato per il sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ con } u=Kx$$
$$y = Cx + Du$$

e quindi si ottiene:

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Per ottenere la retroazione di stato (K) si devono allocare i poli lungo le posizioni definite dalla traccia (in Matlab si usa il comando *place*).

Successivamente si progetta uno stimatore[1] (con x' osservatore di x):

$$\dot{x}' = Ax' + Bu + LC(x-x')$$

si considera il sistema errore che valuta lo scarto tra lo stato effettivo e la stima dello stato:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}' = A(x-x') + LC(x-x') = Ae + LCe = (A + LC)e$$

Il vettore L viene calcolato attraverso l'allocazione dei poli lungo le posizioni definite dalla traccia, tuttavia è buona norma progettarlo almeno 3 volte più veloce del controllore per evitare che il controllo si porti dietro anche il ritardo della stima.
Lo stimatore finale sarà:

$$\dot{x}' = (A+BK+LC)x' - Ly$$
$$u = Kx$$

la cui f.d.t. sarà:

$$Gcr(s) = -K(sI-(A+BK+LC))^{-1} L$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{\delta\omega_n} = 3 \\ e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.03 \end{cases}$$

$$retroazione\ di\ stato \begin{cases} \delta = 0.74 \\ \omega_n = 1.78 \end{cases}$$

$$stimatore \begin{cases} \delta_1 = 0.7 \\ \omega_{n1} = 9.5143 \end{cases}$$

```
%rappresentare il sistema nello spazio degli stati
num=1;
den=[1,2,0];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);
%progettazione della retroazione di stato u=Kx -> A+BK
d=0.74;
wn=1.78;
p=[-d*wn+j*sqrt(1-d^2)*wn,-d*wn-j*sqrt(1-d^2)*wn];
K=place(A,B,p);
K=-K;
%progettazione dello stimatore A+LC
d1=0.7;
wn1=9.5143;
p1=[-d1*wn1+j*sqrt(1-d1^2)*wn1,-d1*wn1-j*sqrt(1-d1^2)*wn1];
L=place(A',C',p1);
L=-L;
%passaggio dallo spazio degli stati alla funzione di trasferimento
[n,d]=ss2tf(A+B*K+L'*C,L',-K,0);
```

--- *Risultati*

[1] Lo stimatore è un osservatore e quindi una copia del sistema di partenza che viene corretto proporzionalmente all'errore.

```
>> K =

   -0.6344   -3.1684

>> L =

  -67.8819  -11.3200

>> Gcr = tf(n,d)

Transfer function:
  -78.93 s - 286.8
---------------------
s^2 + 13.95 s + 100.9
```

Per ottenere il predittore di Smith è sufficiente sostituire nella formula di Gc(s) la Gcr(s) appena ottenuta e la Gp(s)=1/s(s+2).

Conclusioni

Il predittore mostrato non sempre è applicabile in quanto all'interno di se contiene la descrizione completa del modello, non adatto quando il modello è sconosciuto.
E' sensibile agli errori e quindi presenta problemi di robustezza.

Riconoscimenti

Si ringraziano tutti i lettori per il loro commenti e suggerimenti.

Referenze

[1]. http://automatica.ing.unibs.it/mco/tco/4_strutture/smith.html