Esercizio sulla carta di Smith

PREFAZIONE

Questo elaborato è stato fatto su richiesta di alcuni e comprende un esercizio svolto dal prof. Bozzetti durante le lezioni di Antenne e Compatibilità Elettromagnetica in data 22 Dicembre 2009.

Il qui presente ha il compito di impartire un insegnamento pratico per quanto riguarda la carta di Smith partendo comunque da cenni teorici per poi arrivare ai grafici.

ESERCIZIO

$Z_L = 100 - j150\ \Omega$ [Impedenza di carico]

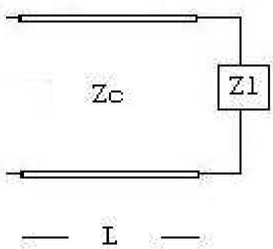
$Z_C = 50\Omega$ [Impedenza caratteristica]

CENNI TEORICI

Assegnati i precedenti parametri si determina l'impedenza normalizzata $\xi(z)$ ovvero il rapporto tra l'impedenza di carico e l'impedenza caratteristica:

$$\xi(z) = \frac{Z(z)}{Z_C} = \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \qquad [1]$$

con $0 < z < L$



$\Gamma(z)$ è il coefficiente di riflessione, e guardando l'asse di riferimento abbiamo z=0 sul carico e per "z" negative spostandosi verso il generatore, come mostrato in figura.

Nella seguente figura vengono mostrati due segnali:

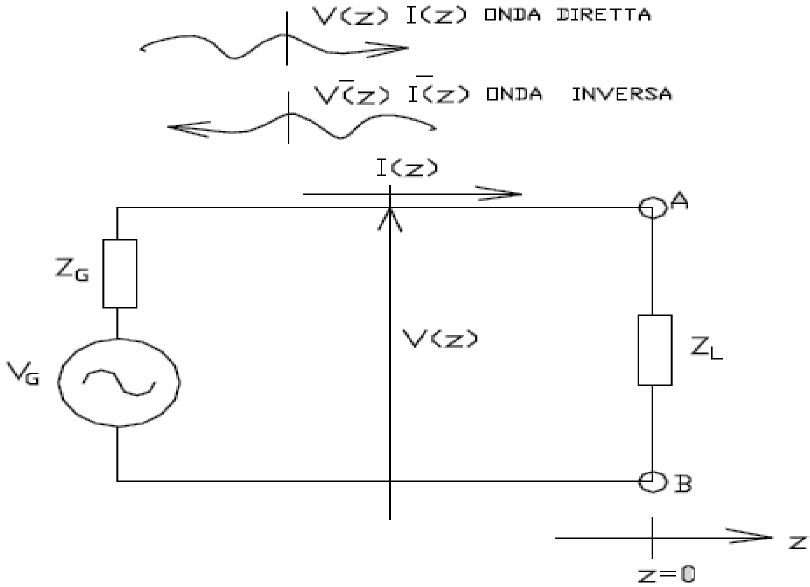
$V^+(z)e^{-jkz} = Z_c \cdot I^+(z)e^{-jkz}$ (onda diretta)

$V^-(z)e^{jkz} = Z_C \cdot I^-(z)e^{jkz}$ (onda inversa)

Se ci accorgiamo che $V^-(z) = 0$ non abbiamo onda riflessa, se invece $V^-(z) = V^+(z)$ l'onda trasmessa viene tutta riflessa ovvero rispedita al generatore.

$$V(z) = V^+(z)e^{-jkz} + V^-(z)e^{jkz}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_C}(z)e^{-jkz} - \frac{V^-}{Z_C}(z)e^{jkz}$$



Sezione per sezione del circuito in figura posso considerare questo parametro di riflessione:

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{jkz}}{V^+ e^{-jkz}} = \frac{V^- e^{2jkz}}{V^+}$$

Dove il modulo è costante e la fase cambia con una velocità doppia rispetto all'onda. In corrispondenza del *carico* quindi:

$\Gamma(0) = \Gamma(LOAD) = \frac{V^-}{V^+}$ perche z=0 quindi $\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz}$ [2]

Ci accorgiamo che il coefficiente di riflessione è a modulo costante e velocità doppia rispetto all'onda trasmessa.

Avendo:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz}}{V^+ e^{-jkz} - V^- e^{jkz}} \cdot Z_C$$

Si divide tutto per $V^+ e^{-jkz}$ ottenendo cosi:

$$Z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \cdot Z_C$$

Risolvendo il tutto rispetto a $\Gamma(z)$ abbiamo:

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_c}{Z(z) + Z_C}$$

Per $\Gamma(0) = \frac{Z(0) - Z_C}{Z(0) + Z_c} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$ e $Z_L = Z_C$ abbiamo che $\Gamma(0) = 0$ ovvero guardando la [2] il coefficiente di riflessione sarà nulla su tutta la rete il che implica che l'onda riflessa, quella che va dal carico al generatore,non si propaga. Il nostro obiettivo finale è proprio quello di rendere nullo il coefficiente di riflessione in modo tale da ottenere un massimo trasferimento di potenza attiva e impedendo che si propaghi l'onda riflessa.

Il modulo di $\Gamma(z) = \frac{V^-}{V^+}$ dove $V^+(z) = Z_c \cdot I^+(z)$ (onda diretta) e $V^-(z) = Z_C \cdot I^-(z)$ (onda inversa), a rigor di logica abbiamo:

$0 \leq \Gamma(z) \leq 1$ dove per 1 l'onda diretta viene completamente riflessa(assenza di componenti resistivi), invece per 0 l'onda diretta non viene riflessa(carico adattato, il generato non si accorge di componenti reattivi). Si osserva facilmente che per $V^- = 0 \Rightarrow \Gamma(z) = 0$.

Se prendiamo la [1] e la risolviamo rispetto a Γ(z), otteniamo:

$$\Gamma(z) = \frac{\xi(z) - 1}{1 + \xi(z)}$$

Dalla precedente affermazione il coefficiente di riflessione si annulla quando $\xi(z) = 1$. Essendo $\xi(z)$ un impedenza, può essere composta da una parte reale ("r") e da una parte immaginaria("jx"):

$$\xi(z) = r + jx$$

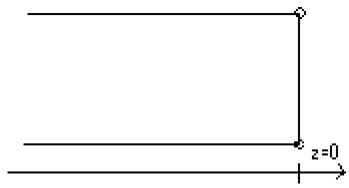
$$\xi(z) = 1 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 (\text{resistenza}) \\ x = 0 \ (\text{reattanza}) \end{cases}$$

Dalla precedente ci accorgiamo che per adattare un carico la parte immaginaria deve essere azzerata.

L'adattamento del carico può essere effettuato sia in serie che in parallelo, per completezza si mostreranno tutti e due i casi. Inoltre L'adattamento può essere effettuato con componenti reattivi oppure degli stub(spezzoni di cavo), anche in questo caso di seguito se ne mostreranno i casi.

Gli stub sono dei tronchi di linea di trasmissione che fungono da carico resistivo. Ne esistono di sue tipi:

- Stub circuito chiuso
- Stub circuito aperto



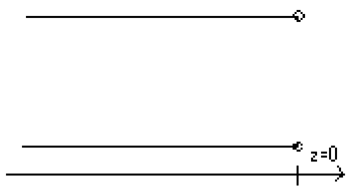
Uno <u>stub in circuito chiuso</u> ha per z=0 V(z)=0

$$V(z) = V^+(z)e^{-jkz} + V^-(z)e^{jkz} = 0 \Rightarrow V^+ = -V^- \Rightarrow$$

$$\Gamma(z) = \frac{-V^-}{V^+} = -1$$

$$\overline{V}(z) = 2jV^+ \frac{[e^{-jkz} - e^{jkz}]}{2j} = -j2V^+ \, sen(kz) \cdot e^{j\omega t} = 2V^+ \, sen(kz) sen(\omega t)$$

Ed è caratterizzato ad avere un minimo in z=0 e un massimo in $\frac{\lambda}{4}$ poi uno zero in $\frac{\lambda}{2}$.



Uno <u>stub in circuito aperto</u> ha per z=0 I(z)=0

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_C}(z)e^{-jkz} - \frac{V^-}{Z_C}(z)e^{jkz} = 0 \Rightarrow V^+ = V^- \Rightarrow$$

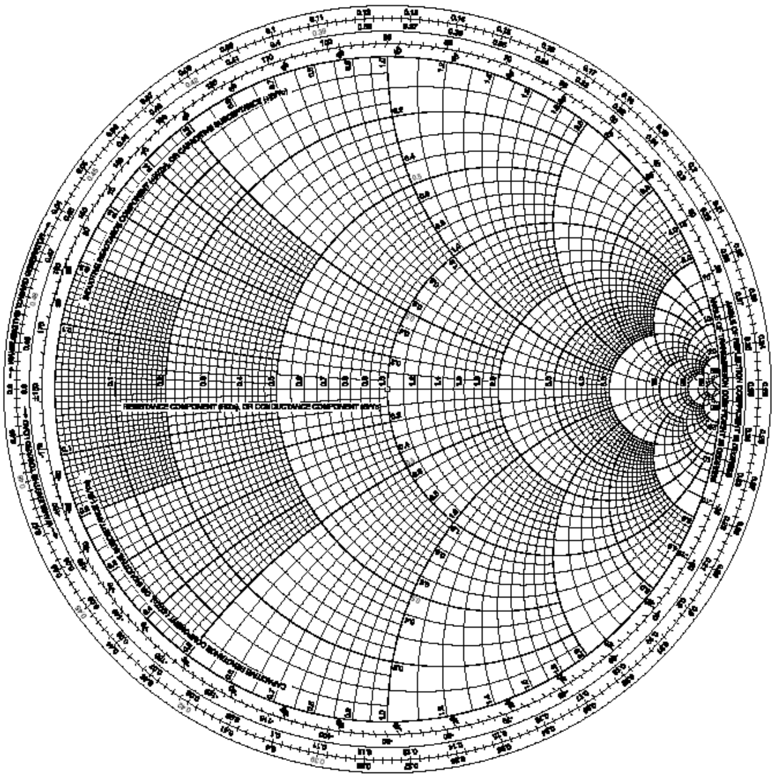
$$\Gamma(z) = \frac{V^-}{V^+} = 1$$

$$\overline{V}(z) = 2V^{+}\frac{[e^{-jkz} + e^{jkz}]}{2} = 2V^{+}\cos(kz) \cdot e^{j\omega t} = 2V^{+}\cos(kz)\cos(\omega t)$$

Ed è caratterizzato ad avere un massimo in z=0 e uno zero in $\frac{\lambda}{4}$ poi uno massimo in $\frac{\lambda}{2}$.

Uno strumento grafico che permette abbastanza velocemente l'operazione di adattamento è la carta di Smith.

CARTA DI SMITH

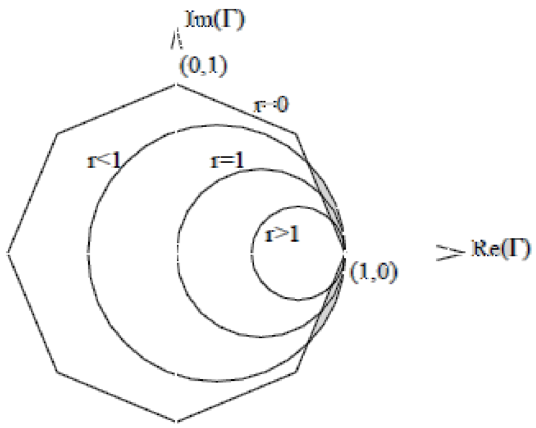


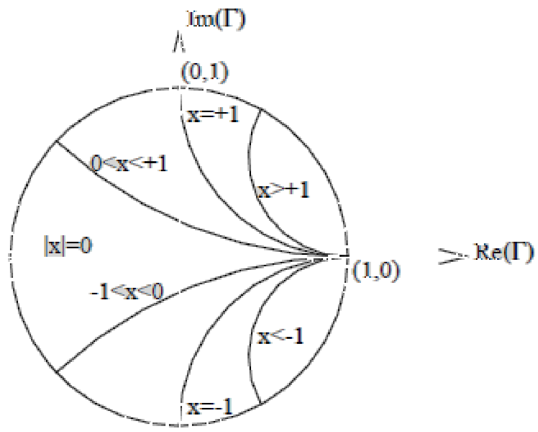
La carta di Smith è formata da una serie di circonferenze, per ogni valore di r,x e Γ(0). Essa assume la forma di un piano con coordinate reali e complesse. Sostanzialmente esistono due carte di Smith, una per le impedenze e l'altra per le ammettenze. Ma è possibile ottenere una girando di 180° l'altra.

Per le circonferenze di Γ(0), abbiamo che per Γ(0)=0 essa è situata nell'origine mentre per Γ(0)=1 essa si trova sulla circonferenza più esterna. Ne consegue che la carta di Smith e da trattare con raggio unitario perche Γ(0) è al più 1.

Per le circonferenza di "r" ne abbiamo infinite, tutte che si incontrano in un punto esattamente a $\varphi_r = 0$ a $\varphi_{\Gamma(0)} = 0$ della circonferenza di Γ(0)=1. Per r=0 abbiamo che la circonferenza copre tutto il piano andandosi a sovrapporre con la circonferenza di Γ(0)=1, all’aumentare di r le circonferenze si restringono, ricordando che hanno tutte un punto in comune. Per r=1 la circonferenza interseca l’origine(0,0) del piano. Per $r \to +\infty$ le circonferenze si stringono molto velocemente fino a sovrapporsi tutte nel punto 1+j0 del piano di Γ(0).

Delle circonferenze di “x” c’è ne sono di due tipi perche la reattanza può essere sia positiva(induttiva) che negativa(capacitiva). Per qualsiasi valore di x anche queste circonferenze si incontrano tutte in 1+j0 del piano di Γ(0), e anch’esse si restringono per valori di $x \to (-\infty, +\infty)$ con l’unica differenza che le circonferenze con le x negative crescono verso il basso con valori di $x \to 0$ mentre le circonferenze con x positive crescono verso l’alto per $x \to 0$.





Siccome il coefficiente di riflessione è a modulo costante ma ha velocità doppia dato dalla seguente legge: $\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz}$, avendo a questo punto fissato come riferimento z=0 in prossimità del carico, quando ci spostiamo sulla linea di trasmissione per effettuare delle misure ci accorgiamo che il valore del coefficiente di riflessione si sta modificando a causa del cambiamento di fase: e^{2jkz}. Sulla carta di Smith questo parametro farà tracciare una circonferenza di modulo costante. Siccome z=0 per il carico e z=-L per il generatore, abbiamo che se ci spostiamo verso il generatore e^{2jkz} si ha un esponente con valori sempre più negativi e quindi effettuiamo spostamenti in senso orario sulla circonferenza, mentre se dal generatore ci spostiamo vero il carico abbiamo l’esponente che assume valori crescenti e quindi effettuiamo una rotazione in senso antiorario. Se ci spostiamo di un tratto $\Delta\alpha$ otteniamo uno spostamento di $2k\Delta z(\text{si guardi l'esponenziale } e^{2jkz})$.

$$\Delta\alpha = 2k\omega\Delta z = 2\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z = 4\pi\frac{\Delta z}{\lambda}$$

<u>Dalla precedente si evince che se effettuiamo uno spostamento $\Delta z = \lambda$ dal carico verso il generatore, osserviamo che il vettore del coefficiente di riflessione Γ(0) compie due giri(4π). Con $\frac{\lambda}{2}$ eseguiamo un giro completo mentre con $\frac{\lambda}{4}$ eseguiamo mezzo giro.</u>

Di notevole importanza è il fatto che nel punto dove si incontrano tutte le circonferenze 1+j0 abbiamo la condizione di circuito aperto perché in prossimità di quel punto $Z = \infty$, mentre nel punto -1+j0 abbiamo la condizione di corto circuito perché $Z = 0$.

Esternamente alle circonferenza ci sono tre righelli: angoli centesimali, sessagesimali e $\frac{\Delta z}{\lambda}$, quest’ultima scala è possibile ottenerla perché abbiamo che $\frac{\Delta z}{\lambda} = \frac{\Delta\alpha}{4\pi}$.

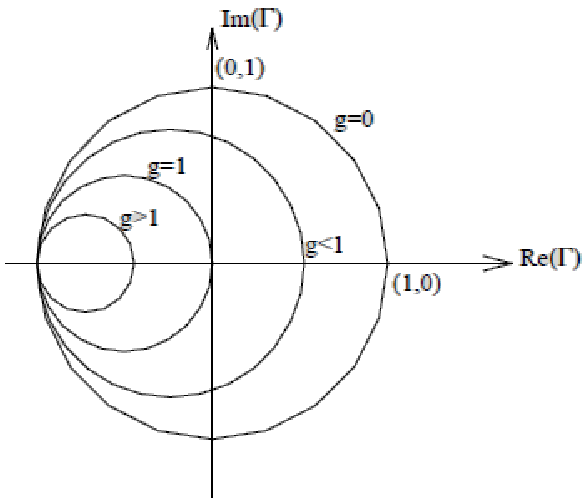
Le precedenti osservazioni sono riferite alla carta di Smith delle impedenze, come detto sopra e possibile ottenere la carta di Smith della ammettenze girando la carta di 180°. In questo caso y(z) = g + jb

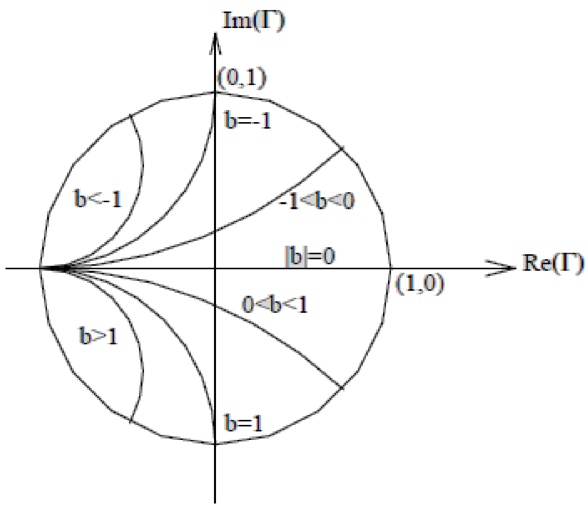
$$y(z) = \frac{Y(z)}{Y_C} = \frac{1}{\xi(z)} = \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{y(z)-1}{1+y(z)}$$

Per rendere nullo il coefficiente di riflessione Γ(z) dobbiamo fare in modo che l'ammettenza $y(z) = 1$ e quindi:

$$\begin{cases} g = 1\ (conduttanza) \\ b = 0\ (suscettanza) \end{cases}$$





Ciò che rimane invariata è la posizione della condizione di circuito aperto e circuito chiuso e la posizione di $\Gamma(0)e^{0}$.

In definitiva esistono due tipi di carta di Smith perché quella delle impedenze è usata per gli adattamenti di tipo serie(perche si sfrutta la somma di impedenze) e quella delle ammettenze è usata per gli adattamenti di tipo parallelo(perche si sfrutta la somma di ammettenze). Nulla vieta di invertire i casi, ma si va in contro a dei calcoli più complessi.

RISOLUZIONE ESERCIZIO

Adattamento in serie

$$\xi(0) = \frac{100 - j150}{50} = 2 - j3$$

Andiamo sulla carta di Smith e individuiamo la circonferenza di r=2(colore verde chiaro) e x=-3(colore celeste), queste due circonferenze hanno intersezione sia in 1+j0 e sia in un altro punto che viene individuato dal vettore Γ(0) (colore viola).

Misurando il vettore Γ(0) risulta: Γ(0)=0,74.

Con il compasso si traccia una circonferenza su tutto il piano con centro nell'origine di lunghezza Γ(0)(colore giallo). Partendo dal carico cioè nel punto in cui vale $\Gamma(0) = \Gamma(0)e^{0}$ dove si ha l'intersezione tra e due circonferenze, ci spostiamo verso il carico, muovendoci in verso orario sulla circonferenza $\Gamma(0)e^{2jkz}$ (gialla) fino a fermarsi nel punto in cui si incontra la circonferenza r=1(segnata con la x rossa). Dalle misure prese sui righelli, per semplicità usiamo la scala $\frac{\Delta z}{\lambda}$, ottenendo:

$$\frac{\Delta z}{\lambda} = 0{,}309 - 0{,}287 = 0{,}022$$

Inoltre nella posizione in cui si raggiunge r=1 si interseca un'altra circonferenza x=-2,2(colore rosa) nella quale ci dice il valore della parte reattiva che assume il coefficiente di riflessione. Nel nostro caso ora abbiamo nel punto raggiunto il coefficiente di riflessione vale:

$$\begin{cases} r = 1 \\ x = -2{,}2 \end{cases}$$

Quindi a questo punto per rendere nulla la parte reattiva(immaginaria) e mantenere r=1 dobbiamo inserire in serie un elemento con parte reattiva pari a 2,2Ω. L'elemento che fa a caso nostro è un induttore con tale reattanza.

Supponiamo di lavorare con un segnale a 1GHz = 10^9Hz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{299863380}{10^9} = 0{,}299 \cong 0{,}3$$

Quindi per rendere r=1 l'induttore deve essere posto a

$$\Delta z = 0{,}022 \cdot \lambda = 0{,}0066\, m$$

dal carico.

In definitiva:

$$z_{tot}(-0{,}0066) = z_{adatt} + z(-0{,}0066) = +j2{,}2 + 1 - j2{,}2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(z) = 0\ (condizione\ di\ adattamento\ puro)$$

Per quanto riguarda l'induttore $jx = j\omega L \Rightarrow L = \frac{x}{\omega} = \frac{2{,}2}{2\pi\ 10^9} = 0{,}35\, nH$, siccome quest'ultima risulta essere normalizzata, si deve moltiplicare il valore ricavato per l'impedenza caratteristica Z_c in modo tale da ottenere il valore effettivo dell'induttore posto in serie.

$$L_e = L \cdot Z_C = 17{,}5\, nH$$

Cit. del docente:*"A questo punto ci si rivolge nei negozi di elettronica e si compra l'induttore oppure, siccome gli induttori alle alte frequenze presentano degli effetti indesiderati, si possono usare degli spezzoni detti stub, che fungono da elementi reattivi in determinate condizioni".*

Usando uno stub in circuito chiuso ci posizioniamo nel punto -1+j0 e ci spostiamo lungo la circonferenza esterna in senso orario per arrivare al punto x=+2,2 e ci accorgiamo che:

$$\frac{\Delta z_{stub\ cc}}{\lambda} = 0{,}182$$

In definitiva lo stub andrà a sostituire l'induttore, quindi si dovrà posizionarlo sempre a 0,0066m dal carico verso il generatore ma avrà una lunghezza $\Delta z = 0{,}182 \cdot \lambda = 0{,}0546\, m$.

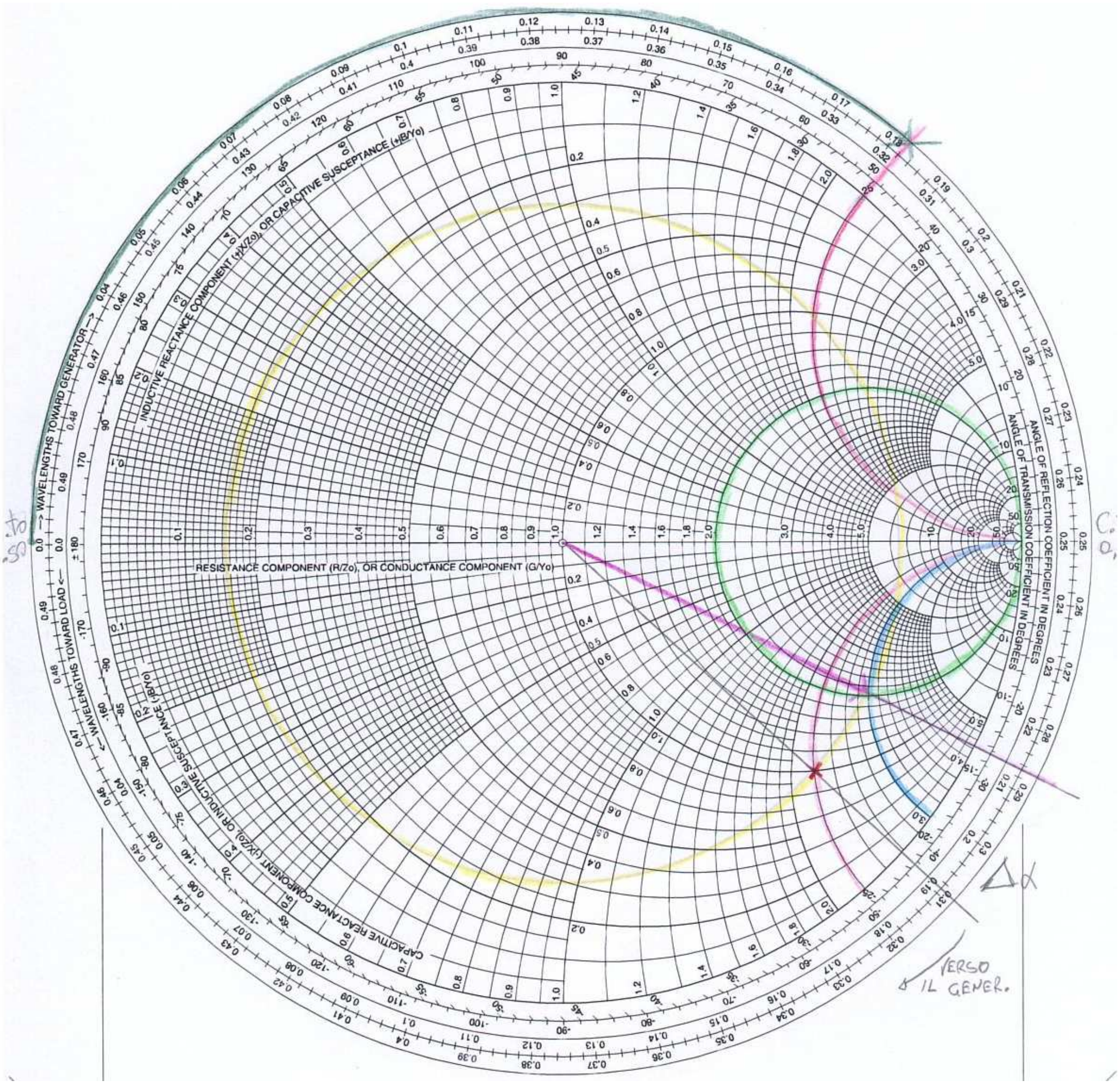
E' possibile usare uno stub in circuito aperto solo che si dovrà partire dal punto 1+j0, percorrendo la circonferenza esterna sempre in senso orario arrivando a x=+2,2.

$$\frac{\Delta z_{stub\ ca}}{\lambda} = 0{,}432$$

Si noti che usando uno stub in circuito aperto si percorre mezzo giro in più rispetto ad uno stub in circuito chiuso

$$\frac{\Delta z_{stub\ ca}}{\lambda} = \frac{\Delta z_{stub\ cc}}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0.182 + 0{,}25 = 0{,}432$$

E' consigliabile usare uno stub con la minore lunghezza, come quello in c.to chiuso in questo caso.



Adattamento in parallelo

$$y(0) = \frac{1}{\xi(0)} = \frac{1}{2-j3} = \frac{2+j3}{13} = 0{,}15 + j0{,}23 \;\; e \; Y_C = \frac{1}{50} \; siemens \; [mho]$$

Dopo aver preso il modello della carta di Smith delle impedenze la ruotate di 180° e individuate da subito la circonferenza di g=0,15(colore verde) e la circonferenza di b=+0,23(colore celeste). Queste due circonferenze oltre al punto -1+j0 hanno intersezione nel punto indicato dalla freccia viola che indica il vettore di Γ(0). Da notare che si trova nella stessa posizione di prima.

Con un righello si misura il modulo di questo vettore e ci accorgiamo che Γ(0) = 0,74, dimostrando il fatto che usando due tipi di adattamenti comunque il coefficiente di riflessione sulla carta non cambia, come non cambia la posizione delle condizioni di corto circuito e di circuito aperto verificandole in seguito.

Prendiamo il compasso e tracciamo una circonferenza(colore giallo) con centro nell'origine(0,0) e lunghezza pari a Γ(0).

Siccome vogliamo che il coefficiente di riflessione sia nullo su tutta la rete, ci spostiamo verso il generatore compiendo una rotazione in senso orario sulla circonferenza appena tracciata finche non raggiungiamo la circonferenza g=1(guarda x rossa). Raggiunta la precedente condizione, dobbiamo leggere l'altra circonferenza che si interseca in quel punto cioè la parte reattiva del coefficiente di riflessione e otteniamo: b=+2,2.

Dall'origine si traccia una riga che incrocia la x rossa fino ad uscire sull'estrema circonferenza, dopo di che si misura l'angolo e/o lo spostamento $\frac{\Delta z}{\lambda}$. Per comodità usiamo il secondo righello e quindi:

$$\frac{\Delta z}{\lambda} = 0{,}192 - 0{,}036 = 0{,}156$$

Il componente per adattare il carico andrà inserito a:

$$\Delta z = 0{,}156 \cdot \lambda = 0{,}0468 \, m$$

dal carico verso il generatore.

Per contro dobbiamo usare un componente che in parallelo fornisca un'ammettenza 0-j2,2 che sommata a quella di presente in z=-0,0468 abbiamo:

$$y_{tot}(-0{,}0468) = y_{adatt} + y(-0{,}0468) = 0 - j2{,}2 + 1 + j2{,}2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(z) = 0 \; (condizione \; di \; adattamento \; puro)$$

Una suscettanza negativa è data da un induttore dove $jb_L = -j2{,}2 = -\frac{j}{\omega L}$ quindi:

$$L = -\frac{1}{\omega b_L} = -\frac{1}{2\pi f b_L} = 72pH$$

Ma la precedente induttanza è normalizzata quindi la si deve moltiplicare per Y_C:

$$L_e = L \cdot Y_C = 1{,}44 \, pH$$

Per problemi legati alle alte frequenze spesso è conveniente usare degli stub. Per degli stub in circuito chiuso si parte dal punto -1+j0(questo punto non varia con la rotazione della carta), perché li abbiamo la condizione di $Y = \infty$, muovendosi in senso orario(colore verde scuro) fino a raggiungere la circonferenza b=-2,2, percorrendo un tratto:

$$\frac{\Delta z_{stub\ cc}}{\lambda} = 0{,}318 - 0{,}25 = 0{,}068$$

La lunghezza dello stub sarà:

$$\Delta z_{stub\ cc} = 0{,}068 \cdot \lambda = 0{,}0204\ m$$

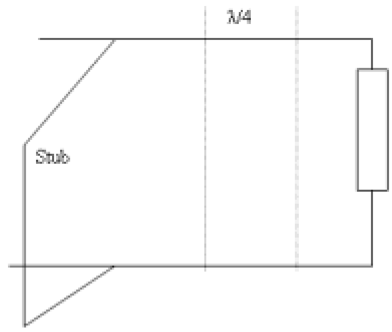
Se si usa uno stub <u>in circuito aperto è come se percorressimo mezzo giro in più rispetto allo stub in circuito chiuso</u>:

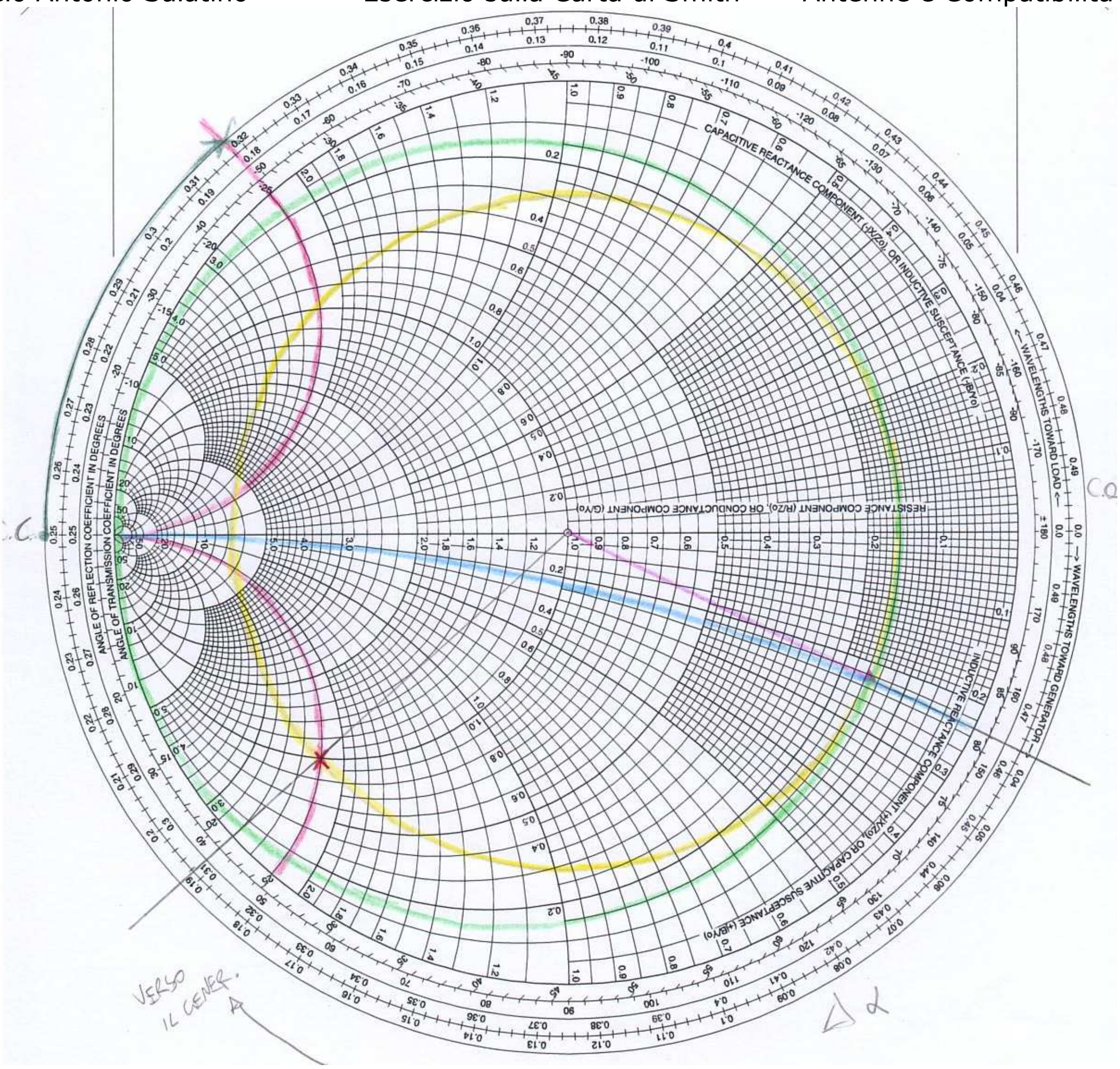
$$\frac{\Delta z_{stub\ ca}}{\lambda} = \frac{\Delta z_{stub\ cc}}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0{,}068 + 0{,}25 = 0{,}318$$

avente lunghezza:

$$\Delta z_{stub\ ca} = 0{,}318 \cdot \lambda = 0{,}0954\ m$$

risultando più lungo e ingombrante.





BIBLIOGRAFIA

Appunti e Dispense del corso di Antenne e Compatibilità Elettromagnetica a cura del prof. Bozzetti.

CONTRIBUTI

Angelo Antonio Salatino

aas88ie@gmail.com

http://infernusweb.altervista.org